

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2018.03.006

基于高斯伪谱法的吸气式高超声速 飞行器爬升弹道优化研究

杨志红,徐宝华,姚德清

(北京空天技术研究所,北京 100074)

摘要:吸气式高超声速飞行器爬升弹道设计是其总体设计的一个重要问题。这里提出一种基于高斯伪谱法的弹道优化方法,用于解决该问题。以末端弹道倾角为性能指标,飞行攻角为设计变量,建立了飞行器纵平面弹道优化模型。通过高斯伪谱法对状态变量和控制变量进行离散,将最优控制问题转化为非线性规划问题,再利用序列二次规划算法对其进行进一步求解。仿真结果表明,该方法收敛域大,对初值不敏感,设计精度高,是吸气式高超声速飞行器方案弹道优化的重要方法。

关键词:高超声速飞行器;高斯伪谱法;弹道优化

中图分类号:V421

文献标志码:A

文章编号:2095-8110(2018)03-0035-06

Research on Climbing Trajectory Optimization of Air-breathing Hypersonic Vehicle Based on Gauss Pseudospectral Method

YANG Zhi-hong, XU Bao-hua, YAO De-qing

(Beijing Aerospace Technology Institute, Beijing 100074, China)

Abstract: The climbing trajectory optimization of the air-breathing hypersonic vehicle has been a major problem in its overall design. A ballistic optimization method based on Gaussian pseudospectral method is presented to solve this problem. Taking the end trajectory inclination as the performance index and the flight attack angle as the design variables, the longitudinal plane trajectory optimization model of the aircraft is established. The state variables and the control variables are discretized through Gaussian pseudospectral method, and the optimal control problem is transformed into nonlinear programming problem. Then the sequential quadratic programming algorithm is used to further solve it. The simulation results show that the method has a large convergence domain and high design accuracy, and is insensitive to the initial value. It can be an important method for trajectory optimization of air-breathing hypersonic vehicle.

Key words: Hypersonic vehicle; Gauss pseudospectral; Trajectory optimization

0 引言

在吸气式高超声速飞行器技术研究中,弹道设计^[1]在飞行器设计中占有十分重要的地位,是使吸气式高超声速飞行器具有可行性和有效性的关键。

与传统的飞行器不同,吸气式高超声速飞行器具有跨大空域、跨大速度范围的飞行包线、严酷的气动热环境、复杂的气动载荷、苛刻的发动机工作条件、严重气动耦合、大气参数依赖程度高与参数的剧烈

收稿日期:2017-07-27;修订日期:2017-11-17

作者简介:杨志红(1973-),女,博士,研究员,主要从事高超声速飞行器建模,轨迹优化、制导及飞行器姿态稳定控制方面的研究。E-mail:baobaolaoyi@126.com

变化等特点,使其弹道设计成为总体方案中的一个重要难点。因此,研究一种能够同时考虑多种约束条件,适应广泛不确定性的方案弹道设计方法,具有十分重要的意义。

在工程应用中,传统的弹道设计方法是基于经验设计程序攻角,形成方案弹道。该方法在传统型号的研制中起着十分重要的作用,有着良好的效果。但是随着飞行任务种类的多样,飞行环境的严苛,飞行器结构的复杂,新型飞行器的设计经验不足,致使传统弹道设计方法弊端凸显。首先,在飞行走廊约束不强时,仅能完成飞行任务,无法实现飞行器最优性能;其次,在飞行走廊狭窄,约束苛刻时,在有限次数的调试中,难以找到可行的程序弹道;最后,传统的弹道设计方法需要反复多次修正,耗时长。

弹道优化思想起源于最优控制问题解决方法,一般分为两类,直接法和间接法^[2-3]。间接法精度高,但是推导最优解的过程复杂繁琐,对初值估计精度要求高,且初值变量无物理意义,难以估算,使得该方法的应用受到很大限制;直接法随着计算机技术的发展,受到广大学者的青睐,并广泛应用于弹道优化问题,该方法通过将最优控制问题的变量参数化,转化为非线性规划问题进行求解,进而衍生出来的方法包括:直接打靶法^[4]、配点法^[5]、伪谱法^[6]、微分包含法^[7]、动态逆方法^[8]等等。

本文选取吸气式高超声速飞行器为研究对象,因飞行器结构外形特点,使其具有气动/推进/弹性耦合特性,与传统飞行器总体设计相比总体设计域较窄,给弹道优化与设计带来较大困难。为满足结构强度、结构热以及控制设计需求,飞行器弹道约束^[9]严苛,用传统的方案弹道设计方法很难确定较为理想的弹道。本文采用高斯伪谱法^[10](Gauss Pseudospectral Method, GPM)求解吸气式高超声速飞行器的上升段弹道。

1 弹道优化模型

1.1 高超声速飞行器运动学模型

对于吸气式高超声速飞行器采用如下运动学模型:

$$\dot{V} = \frac{(P \cos \alpha - X)}{m} - g \sin \theta$$

$$\dot{h} = V \sin \theta$$

$$\dot{x} = V \cos \theta$$

$$\dot{\theta} = \frac{P \sin \alpha + Y}{mV} + \left(\frac{V}{R+h} - \frac{g}{V} \right) \cos \theta$$

$$\dot{m} = m_c \quad (1)$$

其中, P 是发动机推力; X 是阻力; θ 是弹道倾角; α 是飞行攻角; R 是地球半径; h 是飞行高度; x 是射程; m_c 是燃油流量; V 是飞行速度。

1.2 飞行任务剖面

以一种空射高超声速飞行器为例,如图1所示,飞行任务共分为五段:带飞段、助推段、爬升段、巡航段和无动力下滑段。飞机带飞至指定发射点投放发射,发射后助推器点火,一级加速爬升,在预定的分离窗口进行保护罩分离和级间分离,随后调整姿态进入转级窗口;然后,超燃冲压发动机点火接力,继续加速爬升,到达预定高度后按规划弹道巡航飞行;最后关闭发动机,并无动力滑行下降。

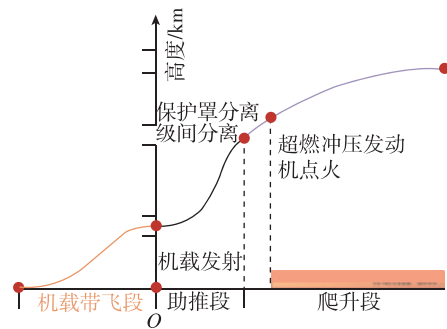


图1 飞行任务剖面

Fig. 1 Flight mission profile

1.3 约束条件和性能指标

在高超声速飞行条件下,严重的气动热,发动机苛刻的工作条件,气动耦合及参数的剧烈变化,使得高超声速飞行器必须满足诸多过程约束和终端约束。本文选取动压、过载、热流、控制量为过程约束,末端高度、攻角为终端约束进行研究。

(1) 过程约束

动压约束:

为满足吸气式高超声速飞行器结构设计与控制效率的要求,对动压应有相应的约束。

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (2)$$

过载约束:

因为飞行器结构刚度所能承受的压力是有限的,所以过载不可过大,同时要满足一定的机动性,因此过载也不能过小。过载约束为:

$$\begin{aligned} n_{x\text{down}} &\leq n_x \leq n_{x\text{up}} \\ n_{y\text{down}} &\leq n_y \leq n_{y\text{up}} \end{aligned} \quad (3)$$

热流约束:

由于高超声速飞行器速度快,导致飞行器所承受的气动热效应严重,为防止结构因高温发生损坏,所以需对热流进行约束

$$\begin{aligned} q_{s\text{min}} &\leq q_s = 0.76 p_r^{-2/3} (\rho_s \mu_s)^{0.5} \sqrt{\left(\frac{dV_e}{dx}\right)_s} (h_s - h_w) \\ &\leq q_{s\text{max}} \end{aligned} \quad (4)$$

控制量约束:

由于飞行器结构、超燃冲压发动机与姿态控制系统设计的限制,吸气式高超声速飞行器飞行时的攻角不能过大,对攻角应有相应约束。

$$\alpha_{\text{down}_p} \leq \alpha(t) \leq \alpha_{\text{up}_p} \quad (5)$$

(2) 终端约束

为保证飞行器级间正常分离和超燃冲压发动机正常点火,需要对终端的飞行攻角和高度进行限制。

终端高度约束:

$$H_{\text{down}} \leq H(t_f) \leq H_{\text{up}} \quad (6)$$

终端攻角约束:

$$\alpha_{\text{down}} \leq \alpha(t_f) \leq \alpha_{\text{up}} \quad (7)$$

(3) 性能指标

为了超燃冲压发动机在点火窗口能够稳定点火一段时间,需要飞行器高度变化小,进而需要较小的弹道倾角,选取末端弹道倾角为优化指标

$$J = -\theta(t_f) \quad (8)$$

吸气式高超声速飞行器爬升段弹道优化问题可归结为初始状态固定,终端状态受约束,终端时刻自由的非线性动态优化问题。

2 高斯伪谱法

高斯伪谱法的解算步骤为,首先,在一系列的 LG(Legendre-Gauss) 节点上将状态变量和控制变量进行离散;然后,采用全局多项式插值,对控制变量和状态变量进行近似,从而将系统的微分约束转化为一组代数约束;最后,以节点处的状态变量和控制变量作为优化设计变量,进而将弹道优化问题转化为非线性规划问题求解。

(1) 动力学微分方程的离散

考虑一般形式的非线性系统动力学方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (9)$$

其中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态变量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控

制变量, $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为连续向量函数。采用高斯伪谱法需要将时间区间 $[t_0, t_f]$ 转换到 $[-1, 1]$, 为此引入变量 τ 对时间 t 进行变换

$$\tau = \frac{2t}{t_f - t_0} - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0} \quad (10)$$

通过 LG 点以及 $\tau_0 = -1$ 上的状态变量构造 Lagrange 插值多项式近似状态变量,得到

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau_k) \approx \dot{\mathbf{X}}(\tau_k) = \sum_{i=0}^K \dot{\mathbf{L}}_i(\tau_k) \mathbf{X}(\tau_i) \quad (11)$$

其中, $L_i(\tau)$ 为插值基函数, τ_i 为 LG 点

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^K \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (12)$$

其中, K 阶 LG 点 $\kappa = \{\tau_1, \dots, \tau_K\}$ 是 K 阶 Legendre 多项式 $P_K(\tau) = \frac{1}{2^K K!} \frac{d^K}{d\tau^K} [(\tau^2 - 1)^K]$ 的根。

$\mathbf{x}(\tau_i) = \mathbf{X}(\tau_i)$, $(i=0, \dots, K)$ 状态变量的导数可通过对 Lagrange 插值多项式求导来近似,从而将动力学微分方程约束转换为代数约束。即

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau_k) \approx \dot{\mathbf{X}}(\tau_k) = \sum_{i=0}^K \dot{\mathbf{L}}_i(\tau_k) \mathbf{X}(\tau_i) = \sum_{i=0}^K \mathbf{D}_{ki}(\tau_k) \mathbf{X}(\tau_i) \quad (13)$$

其中,微分矩阵 $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{K \times (K+1)}$ 的表达式如下

$$\mathbf{D}_{ki} = \dot{\mathbf{L}}_i(\tau_k) = \begin{cases} \frac{(1 + \tau_k) \dot{P}_K(\tau_k) + P_K(\tau_k)}{(\tau_k - \tau_i) [(1 + \tau_i) \dot{P}_K(\tau_i) + P_K(\tau_i)]}, & i \neq k \\ \frac{(1 + \tau_i) \ddot{P}_K(\tau_i) + 2 \dot{P}_K(\tau_i)}{2 [(1 + \tau_i) \dot{P}_K(\tau_i) + P_K(\tau_i)]}, & i = k \end{cases} \quad (14)$$

可得到配点上应满足的代数方程

$$\sum_{i=0}^K \mathbf{D}_{ki}(\tau_k) \mathbf{X}(\tau_i) - \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}[\mathbf{X}(\tau_k), \mathbf{U}(\tau_k), \tau_k; t_0, t_f] = 0, \quad (k=1, \dots, K) \quad (15)$$

其中, $\mathbf{U}(\tau_k)$ 是离散点上的控制量,同样仍采用 Lagrange 插值多项式 $\tilde{\mathbf{L}}_i(\tau)$, $(i=1, \dots, K)$ 作为基函数来近似控制变量,即

$$\mathbf{u}(\tau) \approx \mathbf{U}(\tau) = \sum_{i=1}^K \tilde{\mathbf{L}}_i(\tau) \mathbf{u}(\tau_i) \quad (16)$$

(2) 过程约束

对于过程约束,认为只要离散节点处满足过程约束,全程即满足过程约束,即

$$C(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k; t_0, t_f) \leq 0 \quad (k=1, \dots, K) \quad (17)$$

(3) 终端状态约束

最优控制问题往往包含终端状态约束,而 La-

grange 插值多项式公式中未定义终端状态 x_f , 不过终端状态也应满足动力学方程约束, 根据动力学方程有

$$\mathbf{x}(\tau_f) = \mathbf{x}(\tau_0) + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 f[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau; t_0, t_f] d\tau \quad (18)$$

将终端状态约束条件离散并用高斯积分来近似, 可得

$$\mathbf{X}(\tau_f) = \mathbf{X}(\tau_0) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K \mathbf{w}_k f[\mathbf{X}(\tau_k), \mathbf{U}(\tau_k), \tau_k; t_0, t_f] \quad (19)$$

$$\text{其中, } \mathbf{w}_k = \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{L}}_k(\tau) d\tau = \frac{2}{(1 - \tau_k^2) [\dot{\mathbf{P}}_K(\tau_k)]^2}$$

为高斯权重, τ_k 为 LG 点。

(4) 控制量约束

控制量的约束条件在高斯伪谱法中的处理相对简单, 只需在 LG 点满足约束条件, 即

$$C_1' \leq U_k \leq C_2' \quad (k=1, \dots, K) \quad (20)$$

若当控制量 \mathbf{u} 的导数有约束时, 可通过对其进行求导, 在 LG 点处令其满足约束要求, 即

$$\begin{aligned} C_3' \leq \dot{\mathbf{u}}(\tau_k) &\approx \dot{\mathbf{U}}(\tau_k) = \sum_{i=1}^K \tilde{\mathbf{L}}_i(\tau_k) \dot{\mathbf{U}}(\tau_i) \\ &= \sum_{i=1}^K \tilde{\mathbf{D}}_{ki}(\tau_k) \mathbf{U}(\tau_i) \leq C_4' \end{aligned} \quad (21)$$

其中, 微分矩阵 $\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbf{R}^{K \times K}$ 可离线确定。

(5) 性能指标函数的近似

将 Bolza 型性能指标函数

$$J = \varphi[\mathbf{x}(\tau_0), t_0, \mathbf{x}(\tau_f), t_f] + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_f} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau; t_0, t_f] d\tau \quad (22)$$

式中的积分项用高斯积分来近似, 得到高斯伪谱法中的性能指标函数

$$J = \varphi[\mathbf{X}(\tau_0), t_0, \mathbf{X}(\tau_f), t_f] + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K \mathbf{w}_k L[\mathbf{X}(\tau_k), \mathbf{U}(\tau_k), \tau_k; t_0, t_f] \quad (23)$$

根据以上的数学变换, 文中的弹道优化问题可以描述为: 在 $[t_0, t_f]$ 时间内, 确定离散点上的状态变量 $\mathbf{x}_k (k=1, \dots, n)$ 、控制变量 $\mathbf{u}_k (k=1, \dots, n)$ 和终端时刻 t_f , 使得在满足上述约束条件的情况下性能指标 J 最小。从而将无限维的最优控制问题转换为一般的非线性规划问题。非线性规划问题的求解方法很多, 本文选取稳定性和精度较优的序列二次规划算法^[11]进行求解, 其求解过程如图2所

示, 其算法流程如下:

- 1) 选择适当的初始点 x^0 、正定对称矩阵 \mathbf{B}^0 (一般令 $\mathbf{B}^0 = \mathbf{I}$)、罚因子 $r=0$, 令 $k=0$;
- 2) 计算目标函数及约束函数值;
- 3) 计算偏导数;
- 4) 根据式 $|x^{k+1} - x^k| < \zeta$ (ζ 是极小的正数), 判断是否收敛, 若收敛则停止计算, 否则转 5) 继续计算;
- 5) 解线性规划子问题得到 (d^k, λ^{k+1}) ;
- 6) 更新罚因子;
- 7) 计算罚函数值;
- 8) 通过一维搜索, 确定步长 α , 得到 x^{k+1} ;
- 9) 更新矩阵 \mathbf{B}^k , 转 2)。

SQP 算法在实际运用中, 需要适当选取初始参数, 如果选取得当, 能够加速迭代过程。参数的选取应符合实际问题的物理意义, 否则, 可能会得到不正确的结果。根据具体问题的物理意义和实际经验, 有助于较好地选取初始参数。

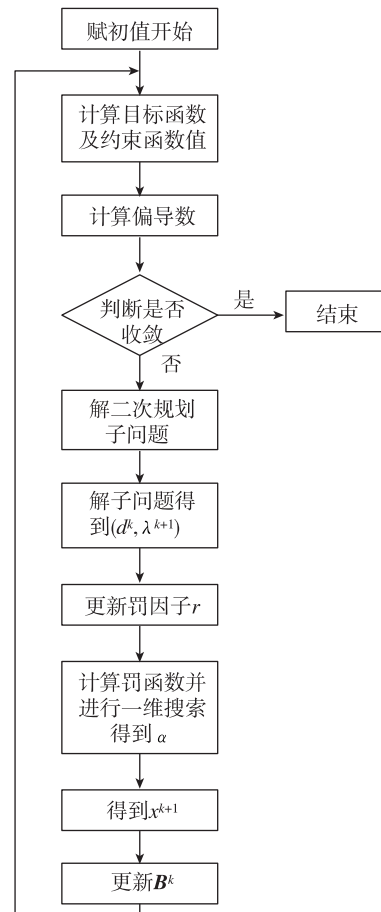
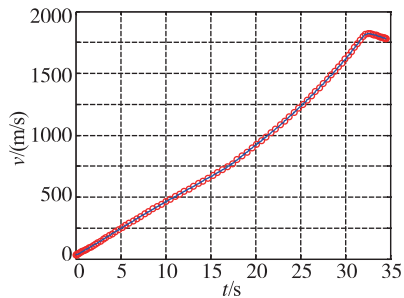


图2 序列二次规划算法流程图

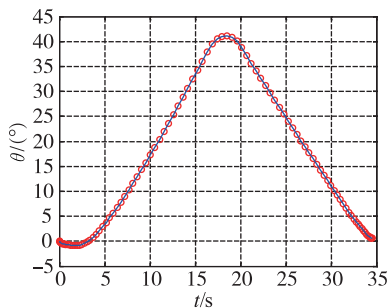
Fig. 2 Sequential quadratic programming algorithm flow chart

3 算例仿真与分析

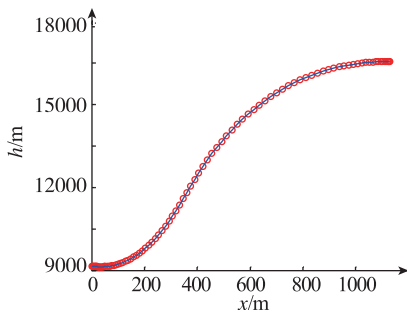
假设飞行器投放高度为 9km, 投放初始速度为 $Ma0.7$, 投放时刻弹道倾角为 0° , 取末端攻角约束 $-1^\circ \leq \alpha(t_f) \leq 1^\circ$, 末端高度约束 $15\text{km} \leq H(t_f) \leq 18\text{km}$, 控制约束分别取 $-16^\circ \leq \alpha(t) \leq 20^\circ$, 并以末端弹道倾角最小作为优化指标。仿真结果如图 3 所示。



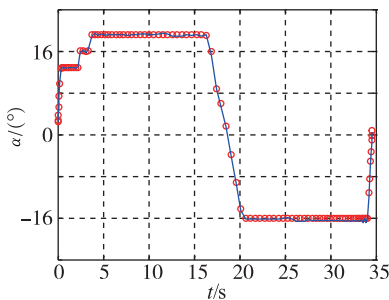
(a) 速度随时间变化曲线



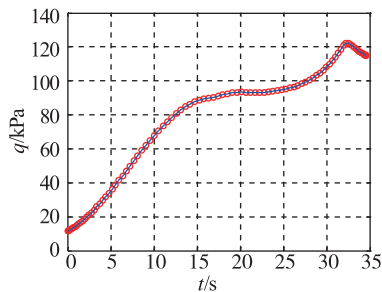
(b) 弹道倾角随时间变化曲线



(c) 高度随水平位移变化曲线



(d) 攻角随时间变化曲线



(e) 动压随时间变化曲线

图 3 弹道仿真结果

Fig. 3 Trajectory simulation results

图 3 中, 红色的点为通过伪谱法得到的各状态变量在离散点处的值, 蓝色曲线为将优化得到的最优控制变量代入到动力学方程, 对各状态变量进行数值积分得到的各状态变量变化曲线。仿真结果表明, 各状态变量随时间变化曲线平缓, 在满足动压、攻角、过载等变量约束的前提下, 能够很好地收敛到终端约束值。末端弹道倾角为 0 , 实现了末端弹道倾角最小这一性能指标。

采用伪谱法能够同时得到控制变量和状态变量。飞行器在实际飞行过程中, 在已知飞行状态初始值的前提下, 状态变量可以通过控制变量对飞行器动力学方程中的状态进行积分获得。如果优化得到的状态变量和通过积分得到的状态量值相等, 优化结果精确可信, 算法有效。基于上述思想, 比较蓝色曲线和红色点组成的曲线, 两者基本吻合, 从图中难以区分差异, 可以说明该方法精度较高, 且结果正确。

在弹道设计过程中, 该方法只需对控制变量、状态变量在某性特定阶段的约束进行限制, 通过优化算法可得到满足约束条件的弹道, 最大限度地发挥飞行器的性能。同时, 以非解析形式, 能够更为精细地调整优化弹道。

4 结论

文中建立了以末端弹道倾角最小为性能指标的吸气式高超声速飞行器弹道优化模型, 采用高斯伪谱法对该模型进行了求解, 对控制变量进行诸多约束限制。仿真结果表明, 该算法优化得到的弹道的状态变量能够在满足过程约束和终端约束的情况下, 使得性能指标达到最优; 计算精度高, 相比传统的方案弹道设计方法, 避免了反复, 提高了设计效率, 可为吸气式高超声速飞行器弹道设计提供参考。

参考文献

- [1] 陈小前. 飞行器总体优化设计理论与应用研究[D]. 长沙:国防科学技术大学,2001.
- [2] 雍恩米, 陈磊, 唐国金. 飞行器轨迹优化数值方法综述[J]. 宇航学报, 2008, 29(2):397-406.
- [3] 吴嘉梁. 基于间接法的上升段轨迹优化方法研究[J]. 导航定位与授时, 2016, 3(2):14-19.
- [4] 李瑜. 助推-滑翔导弹弹道优化与制导方法研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2009.
- [5] Tieu D, Cluett W R, Penlidis A. A comparison of collocation methods for solving dynamic optimization problems [J]. Computers & Chemical Engineering, 1995, 19(4): 375-381.
- [6] Elnagar G, Kazemi M A, Razzaghi M. The pseudospectral Legendre method for discretizing optimal control problems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(10): 1793-1796.
- [7] Seywald H. Trajectory optimization based on differential inclusion [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1994, 17(3): 480-487.
- [8] Lu P. Inverse dynamics approach to trajectory optimization for an aerospace plane [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1993, 16(4): 726-732.
- [9] 王健, 崔文昊, 史震, 等. 攻击角度约束下打击机动目标的制导律[J]. 导航定位与授时, 2016, 3(5):51-55.
- [10] Kang W, Bedrossian N. Pseudospectral optimal control theory makes debut flight, saves NASA \$1 M in under three hours [J]. SIAM News, 2007, 40(7).
- [11] 雍恩米. 高超声速滑翔式再入飞行器轨迹优化与制导控制方法研究[D]. 长沙:国防科学技术大学,2008.